מספרים מרוכבים

Z=קבוצת השלמים,Q=רציונליים,R=ממשיים

הגדרה

z=a+biεC

a,bεR,i²=-1

C נקראת קבוצת המרוכבים

צמוד - a-bi

ערך מוחלט: |z|=√(a²+b²)=מרחק הנקודה מהאפס

חלק ממשי ומדומה: Re(z)=a,Im(z)=b

תרגיל 3.4(עמוד 6)

לכל אחד מהביטויים הבאים

א) חשבו את ערך הביטוי,

ב) ציינו את הערך המוחלט, את הצמוד, את החלק ממשי ואת החלק המדומה

3)z=(5+2i)(2-3i)

z=(5+2i)(2-3i)=10-15i+4i+6=16-11i

Re(z)=16,Im(z)=11,צמוד=16+11i,|z|=√377

4)z=(5+2i)/(2-3i)=(5+2i)(2+3i)/((2-3i)(2+3i))=(10-15i+4i-6)/(4+9)=(4-11i)/13=4/13-11/13\*i

Re=4/13,...

תרגיל 3.5

א) לכל zεC:|Re(z)|≤|z|

הוכחה:

יהי z=a+bi:

|z|²=a²+b²≥a²=Re(z)² => |z|≥|Re(z)|

לכל z1,z2εC => צz1+צz2=צ(z1+z2)

הוכחה:

לכל z1=a1+b1i,z2=a2+b2i

צ(z1+z2)=צ(a1+b1i+a2+b2i)=a1+ba2-(b1+b2)i

צz1+צz2=צ(a1+b1i)+צ(a2+b2i)=a1-b1i+a2-b2i=a1+ba2-(b1+b2)i

טענה:

צz1\*צz2= (z1\*z2)

הוכחה

טענה:

הוכחה:

(a+bi)(a-bi)=a²+abi-abi+b²=a²+b²=|z|²

טענה: |z1z2|=|z1||z2|

|z1z2|²=z1\*z2\*צz1\*צz2=z1\*צz1\*z2\*צz2=|z1|²\*|z2|² => |z1z2|=|z1||z2|

מותר להוציא שורש כי ערך מוחלט תמיד חיובי

טענה

הוכחה:

(a+bi+a-bi)/2=2a/2=a

(a+bi-a+bi)/2i=2b/2i=b

תרגיל 3.6 ב'

פתרו מעל C:

2z²-8z=10-20i+12zi

פתרון

2z²-8z-12zi-10+20i=0 => 2z²+(-8z-12zi)-10+20i=0

z1,2=(8+12i±√(32i))/4=(8+12i±4√(2i))/4=2+3i±√(2i) \*

נחשב את השורש

√(2i)=a+bi => (a+bi)²=2i=a²+2abi-b² => a²-b²=0,2ab=2i, b=1/a, a²-1/a²=0, a²=1/a²,a^4=1, a=±1 => √(2i)=±(1+i)

נמשיך את \*

=2+3i±(1+i), z1=3+4i,z2=1+2i

הצגה פולרית(קטבית)

ניתן לאפיין כל מספר מרוכב╪0 ע"י זוית ומרחק מראשית הצירים. המרחק מסומן r והזוית מסומנת Θ

z=a+bi=re^(iΘ)=rcisΘ=r(cosΘ+isinΘ)

כאשר

r=|z|,Θ=atan(b/a)+πn

הערות:1) המשוואה הזאת תוכח רק בשנה הבאה

2)כאשר מחפשים את הזווית יש לבדוק אם צריך להוסיף 180(או π רדיאנים) לפי הרביע

3)הזוית של מדומה טהור היא π/2 או -π/2

מעבר לצורה קרטזית(a+bi):

a=rcosΘ,b=rsinΘ

דוגמאות

1)z=1-i,r=√((1²+(-1)²)=√2,Θ=atan(-1/1)=-π/2+πn, לפי הרביע Θ=1.5π

2)z=2e^(iπ/3), a=2cos(π/3)=1,b=2sin(π/3)=√3

משפט DeMoivre:

מתקיים (rcisΘ)ⁿ=rⁿcis(nΘ)

תרגיל 3.8: חשבו את

(1+√3)^2010

r=√(1+3)=√4=2,Θ=atan√3=π/3

(2cis(π/3))^2010=2^2010cis(670π)=2^2010cis0=2^2010

תרגיל 3.6א

z^4=-16i

r^4e(4iΘ)=16e(-iπ/2) => r=2, Θ=-π/8+k/4, k=0,1,2,3

Zk=2e^(i(-π/8+kπ/2))

נוסחה כללית

Zk=ⁿ√r\*e^(i(Θ+2πk)/n)

תרגיל:הוכיחו את הנוסחה

cos(α+ß)=cosα\*cosß-sinα\*sinß

פתרון:

(1) e^(i(α+ß))=cos(α+ß)+isin(α+ß)

(2) (cosα+isinα)(cosß+isinß)=cosα\*cosß+cosαisinß+cosßisinα-sinα\*sinß=סעיף 1 לפי חוקי הטריגו